

Prueba C-6. Álgebra - MATHO

P1 a) Para probar que $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ es cuerpo, la mejor forma es probar que $(\mathbb{R}, *)$ es grupo abeliano, $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ es grupo abeliano y \cdot distribuye en respecto a $*$.
 $(\mathbb{R}, *)$ es grupo abeliano. En efecto.
 $*$ es l.c.i. asociativa pues $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

1.0

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= \sqrt[3]{x^3 + (y * z)^3} = \sqrt[3]{x^3 + (\sqrt[3]{y^3 + z^3})^3} = \sqrt[3]{x^3 + (y^3 + z^3)} \\ &= \sqrt[3]{(x^3 + y^3) + z^3} = \sqrt[3]{(x * y)^3 + z^3} = (x * y) * z \end{aligned}$$

0.5

$*$ es conmutativa $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \sqrt[3]{y^3 + x^3} = y * x$$

0.5

Neutro para $*$. $e \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

$$e * x = \sqrt[3]{e^3 + x^3} = x \Rightarrow e^3 + x^3 = x^3 \Rightarrow e = 0 \in \mathbb{R} \text{ es neutro}$$

0.5

Inverso. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}$ tal que

$$x * x' = e = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3 + (x')^3} = 0 \Rightarrow x' = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Así, $(\mathbb{R}, *)$ es grupo abeliano.

1.0

Además $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ es grupo abeliano (según indicación)

Por último, para la distributividad.

0.5

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * \sqrt[3]{y^3 + z^3} = \sqrt[3]{x^3 + (y * z)^3} = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3} = \sqrt[3]{(x * y)^3 + z^3} \\ &= (x * y) * z \end{aligned}$$

Segue que $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ es cuerpo

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ es isomorfismo

Es inmediato que f es biyectiva.

1.0

Isomorfismos de $(\mathbb{R}, *)$ en $(\mathbb{R}, +)$ y de (\mathbb{R}, \cdot) en (\mathbb{R}, \cdot) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

1.0

i) $f(x * y) = (x * y)^3 = (\sqrt[3]{x^3 + y^3})^3 = x^3 + y^3 = f(x) + f(y)$

ii) $f(xy) = (xy)^3 = x^3 \cdot y^3 = f(x) \cdot f(y)$

→ Otorgar el mismo puntaje (1.0) si no aprovecha la indicación y describe las propiedades de $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$

P2 a) Demostrar que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad f(z_1, z_2) \cdot f(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \leq (|z_1| + |z_2|)^2$

En efecto $f(z_1, z_2) \cdot f(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = |z_1 + z_2| \cdot |\bar{z}_1 + \bar{z}_2| = |z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2|$

1.0 $\rightarrow = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)|$

Triangular
 $\hookrightarrow \leq \underbrace{|z_1|^2 + |z_2|^2}_{>0} + 2 |\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)|$

Pero por propiedades $0 \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \wedge |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| |z_2|$

2.0 \rightarrow Sigue que $f(z_1, z_2) \cdot f(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1| |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$

b) Valores de $m \in \mathbb{N}$ para resolver $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2m} - \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2m} = i\sqrt{3}$

Para $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, $\rho = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$ y $\arg = \frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{6}$

1.0 \rightarrow y $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $\rho = 1$ y $\arg = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$

Así $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2m} - \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2m} = \left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{2m} - \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2m} = i\sqrt{3}$

$\Rightarrow e^{-\frac{m\pi}{3}i} - e^{\frac{m\pi}{3}i} = i\sqrt{3}$

$\Rightarrow \cancel{\cos\left(\frac{m\pi}{3}\right)} - i \sin\left(\frac{m\pi}{3}\right) - \left(\cancel{\cos\left(\frac{m\pi}{3}\right)} + i \sin\left(\frac{m\pi}{3}\right)\right) = i\sqrt{3}$

1.5 $\rightarrow \Rightarrow -2i \sin\left(\frac{m\pi}{3}\right) = i\sqrt{3} \Rightarrow \sin\left(\frac{m\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Sigue que $\frac{m\pi}{3} = k\pi + (-1)^k \left(-\frac{\pi}{3}\right)$

0.5 $\rightarrow m = 3k + (-1)^{k+1}$ en $k \geq 1 \wedge m \in \mathbb{N}$